

Kombinirani optimizacijski postopek simpleks-področje zaupanja

Árpád Bűrmen, Janez Puhon, Sašo Tomažič, Tadej Tuma

Fakulteta za elektrotehniko

Univerza v Ljubljani

Tržaška cesta 25, SI-1000 Ljubljana, Slovenija

arpadb@fides.fe.uni-lj.si

Combined simplex-trust-region optimization algorithm

The basic tools employed in IC design automation are various optimization algorithms. These algorithms search for the minimum of a cost function which in turn represents the amount the design requirements are fulfilled. Among one of the most successful is the simplex algorithm. Unfortunately it has some serious shortcomings. One of them is slow convergence in the neighborhood of a cost function minimum. By switching to a faster local optimization method in the final part of the search one expects considerable savings regarding the number of cost function evaluations. The local optimization method of choice was chosen from the class of trust-region algorithms. The condition for switching to a trust-region algorithm was based on the simplex size and the corresponding threshold was determined experimentally. The combined algorithm was tested on a set of mathematical functions and real-world IC design problems. The results show that the combined algorithm outperforms the simplex algorithm both in terms of the number of cost function evaluations and in final cost function value.

1 Uvod

Problem, na katerega prevedemo avtomatsko izbiro vrednosti n parametrov elementov vezja, lahko matematično formuliramo kot

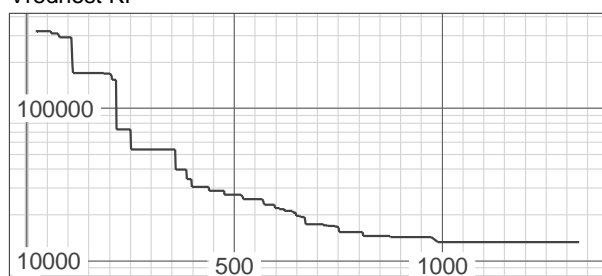
$$\arg \min_{x \in \mathcal{A}} f(x) \quad (1)$$

Pri tem predstavlja x vektor n parametrov, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ območje iskanja in $f(x)$ kriterijsko funkcijo, ki je odvisna od načrtovalskih zahtev. Območje iskanja je običajno omejeno z eksplicitnimi omejitvami oblike $b^i \leq x^i \leq B^i$, $i = 1, 2, \dots, n$, pri čemer x^i pomeni i -to komponento vektorja $x \in \mathbb{R}^n$. Tovrstne probleme rešujemo s pomočjo optimizacijskih postopkov.

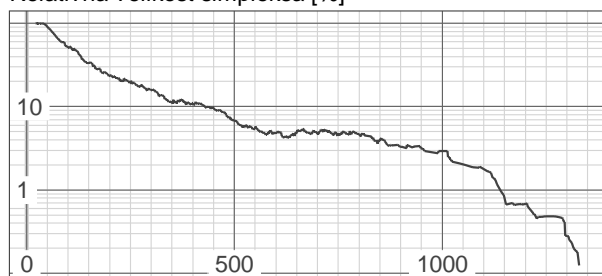
Zelo popularen optimizacijski postopek je simpleksni postopek [1]. Njegove izpeljanke so se zelo dobro obnesle pri optimizaciji analognih elektronskih

vezij. Predvsem dobrodošla je njihova odpornost na numerični šum in sposobnost hitro doseči precejšnje zmanjšanje vrednosti kriterijske funkcije (KF).

Vrednost KF



Relativna velikost simpleksa [%]

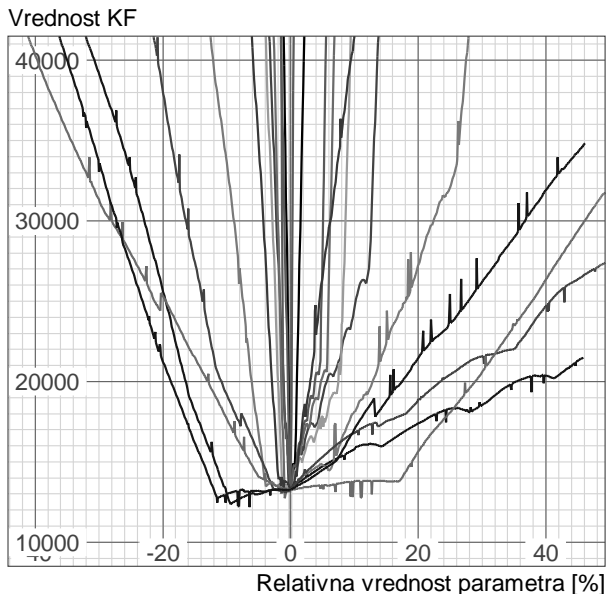


Slika 1: Spreminjanje vrednosti KF v najboljši točki in relativne velikosti simpleksa med optimizacijo digitalnega zakasnilnika.

Figure 1: A plot of the best point cost function (CF) value and the relative simplex size with respect to CF evaluation number for the digital delay testcase.

Glavni razlog za popularnost simpleksnega postopka je verjetno v njegovi enostavnosti. Te popularnosti niso zmanjšali niti mnogi primeri, na katerih postopek odpove. Glavna slabost, ki jo simpleksni potopek izkazuje, je, da ob hitrem začetnem upadanju KF slednje postane zelo počasno v bližini lokalnega minimuma [2]. O tem priča tudi zgornji graf na sliki 1. Po 1000 izračunih KF postopek ne najde več kake bistveno nižje vrednosti KF.

Lokalni optimizacijski postopki (kot naprimer gradientni postopek ali pa postopek področja zaupanja) se pogosto ujamejo v lokalne minimume, ki jih srečajo



Slika 2: Prerez skozi KF za optimizacijo digitalnega zakasnilnika v smereh posameznih optimizacijskih parametrov narejen v točki, kjer se je zaključil simpleksni postopek.

Figure 2: Cost profile for the digital delay testcase. Each curve represents a cross section along one of the optimization parameters through the final point reached by the simplex algorithm. Zero represents the parameter value that corresponds to the final point.

na svoji poti. Vzrok za marsikateri minimum je numerični šum v KF, ki je posledica izračuna lastnosti vezja s pomočjo simulacije. Kako pogosti so taki minimumi kaže slika 2. Manjše ozke konice na sliki so posledica numeričnega šuma. Poleg slednjih pa naletimo tudi na prave lokalne minimume, ki ostanejo v KF tudi, če nam s povečanjem natančnosti računanja numerični šum uspe odpraviti.

Slika 2 pa ne ilustrira samo lokalnih minimumov in šuma. Vrednost 0 na vodoravni osi ustreza vrednostim parametrov, kot jih je našel simpleksni postopek. Že na prvi pogled postane očitno, da postopek ni našel minimuma kriterijske funkcije. Upravičenost simpleksnega postopka postane vprašljiva, ko se približamo minimumu KF. V praksi se izkaže, da postopek potrebuje veliko izračunov KF, da dokončno pade v minimum. Po drugi strani pa bi to delo zlahka opravil kak lokalni optimizacijski postopek (saj odpornost na šum in izogibanje lokalnim minimumom več nista tako pomembna, ko postopek pride v okolico minimuma).

V splošnem pričakujemo nižje končne vrednosti KF in manjše število izračunov KF, če v zaključnem delu iskanja nadomestimo simpleksni postopek s katerim od lokalnih optimizacijskih postopkov (naprimer postopkom področja zaupanja).

V nadaljevanju sta na kratko opisana simpleksni postopek in postopek področja zaupanja. Opisan je kriterij za preklon med postopkoma. Podani so testni primeri, na katerih sta postopka testirana in rezultati optimizacije teh primerov. Na koncu sledi zaključek, ki povzame glavne ugotovitve.

2 Simpleksni postopek

Osnovna ideja simpleksnega postopka je, da manipuliramo z $m \geq n + 1$ točkami (ki jim pravimo tudi simpleks) v n -parameterskem prostoru ($x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$). Vsaki točki pripada neka vrednost KF. Točke sortiramo tako, da velja $f(x_1) \geq f(x_2) \geq \dots \geq f(x_m)$.

Točko x_1 s pomočjo zrcaljenja in primikanja proti težišču preostalih $m-1$ točk ($x_* = (m-1)^{-1} \sum_{i=2}^m x_i$) in primikanja proti najboljši točki poskušamo premakniti tako, da se pripadajoča vrednost KF zmanjša pod vrednost, ki pripada drugi najslabši točki x_2 . Tekom tega postopka se simpleks krči. Ustavitveni kriterij temelji na relativni velikosti simpleksa, ki jo izračunamo kot

$$\Delta = \frac{100}{m-1} \sum_{i=2}^m \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{x_i^j - x_*^j}{B^j - b^j} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2)$$

Ko le ta pade pod neko vnaprej predpisano vrednost (v našem primeru 0.001) se postopek ustavi. Podrobnosti glede same izvedbe postopka so navedene v [1].

3 Postopek področja zaupanja

Osnovna ideja postopka je v izgradnji modela KF ($f_m(x)$) na osnovi vzorčenih točk v parameterskem prostoru. Za model privzamemo, da je veljaven na nekem območju okrog središčne točke (področje zaupanja). Na tem območju poiščemo minimum modela. Nato izračunamo vrednost KF v tej točki. Če se KF zmanjša v primerjavi z vrednostjo v središčni točki, se središče premakne v novo točko. Središče se premakne tudi, če je vrednost KF v kateri od točk potrebnih za izgradnjo modela nižja od tiste v središču. Na osnovi ujemanja med modelom in KF področje zaupanja bodisi razširimo ali pa skržimo, zgradimo nov model in postopek ponovimo.

Področja zaupanja je hiperkocka in ga lahko opišemo z l_∞ normo. l_∞ norma je definirana kot $\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x^i|$. Tako lahko področje zaupanja opišemo kot $\|x_c - x\|_\infty \leq r$. Pri tem x_c predstavlja trenutno točko in r polmer področja zaupanja. Taka oblika področja je še posebej primerna, kadar imamo eksplisitne omejitve parametrov.

Izgradnja kvadratnega modela v n -dimenzionalnem prostoru zahteva $M = (n + 1)(n + 2)/2$ točk. Že za 10-dimenzionalen problem zahteva izgradnja modela izračun KF v 66 točkah. Za 20 dimenzionalen prostor je to število že 231. Če upoštevamo še, da je tipična dolžina optimizacijskega teka s simpleksnim postopkom nekaj 1000 izračunov KF, postane uporaba kvadratnih modelov neracionalna. Drugi argument proti kvadratnemu modelu je, da je za njegovo izgradnjo potrebno rešiti linearen sistem enačb reda M . Za izgradnjo linearnega modela je potrebnih samo $M = n + 1$ točk, model pa dobimo neposredno iz teh točk. Zaradi tega se odločimo za linearen model.

Postopek ustavimo, ko polmer področja zaupanja (r) pade pod neko vnaprej predpisano vrednost (v našem primeru 0.001). Med postopkom področja zaupanja so vse komponente vektorjev iz intervala $[b^i, B^i]$ normirane na interval $[0, 100]$. Na ta interval se nanaša tudi ustavitveni kriterij. Več podrobnosti o postopkih področja zaupanja je na voljo v [3].

4 Kdaj preklopiti?

Na osnovi profilov, kot je na sliki 1, je zelo težko najti skupno lastnost, na osnovi katere bi lahko eno-umno določili točko preklopa med obema optimizacijskima postopkoma. Po drugi strani pa se sam po sebi ponuja sklep, da je preklopiti potrebno, ko simpleksni postopek pride v zadostno bližino minimuma. Ker je merilo za ustavitev simpleksnega postopka velikost simpleksa, je dobra izbira za kriterij preklopa med metodama kar velikost simpleksa. Ko ta pade pod neko vnaprej predpisano vrednost preklopimo na postopek področja zaupanja.

Ob preklopu za začetno vrednost polmera področja zaupanja izberemo $\max_{i=1,2,\dots,m} \|x_i - x_m\|_\infty$. Za začetno središče področja zaupanja izberemo kar točko z najnižjo vrednostjo KF.

Iz tabele 1 za digitalni zakasnilnik je razvidno, da je optimalen trenutek za preklop, ko relativna velikost simpleksa pade pod 2.5. Če preklopimo prej (pri večjem Δ), se postopek ustavi v lokalnem minimumu z višjo vrednostjo KF. Če preklopimo pozneje (manjši Δ), pa je prihranek pri številu izračunov KF manjši.

5 Testni problemi

Kombinirani postopek smo preizkusili na treh matematičnih in šestih elektrotehniških primerih. Za izračun KF smo uporabili programski paket SPICE OPUS [5]. Primeri so naštetih v tabeli 2. Za vsak primer je navedeno število optimizacijskih parametrov (n), število analiz potrebnih za en izračun KF in

Δ	$N_{preklop}$	N	f_{koncna}
0	ni preklopa	1334	13285
0.5	1228	1341	12975
1.0	1143	1256	12975
1.5	1121	1234	12975
2.0	1073	1186	12975
2.5	1018	1131	12975
3.0	958	1071	14317
3.5	873	986	14523
4.0	836	949	14523

Tabela 1: Digitalni zakasnilnik. V tabeli so navedeni: številka izračuna KF pri kateri se zgodi preklop ($N_{preklop}$), celotno število izračunov KF (N) in končna vrednost KF (f_{koncna}) v odvisnosti od relativne velikosti simpleksa ob preklopu (Δ).

Table 1: Digital delay testcase. The table lists the CF evaluation number at which the the switch from simplex to trust-region method occurs ($N_{preklop}$), the total number of CF evaluations (N), and the final CF value (f_{koncna}) for different values of relative simplex size (Δ) that triggers the switch.

število MOS tranzistorjev v vezju. Za elektrotehniške primere je izračun KF zgrajen na osnovi [4].

Problem	n	Analiz	MOS-ov
lin	10	-	-
sq1	10	-	-
sq2	10	-	-
nand	3	9	4
delay	12	2	6
ddamp	14	44	18
damp1	15	31	13
damp2	27	4	20
lfbuf	36	4	32

Tabela 2: Nabor testnih problemov na katerih je bil preizkušen kombiniran optimizacijski postopek.

Table 2: the number of optimization parameters, the number of analyses in one CF evaluation, and the number of MOS transistors in the circuit for different testcases.

Prvi problem (lin) je linearna funkcija 10 spremenljivk. Drugi je konveksna kvadratna funkcija (sq1) z minimumom znotraj iskalnega območja. Konkavna kvadratna funkcija (sq2) ima maksimum znotraj iskalnega območja, minimum pa v enem od njegovih vogalov.

Sledijo elektrotehniški problemi. Najenostavnejša sta NAND vrata (nand) in digitalni zakasnilnik (delay). Nekoliko večji je diferencialno-diferenčni ojačevalnik (ddamp). Sledita dva diferencialna ojačevalnika z enojnim izhodom (damp1 in

damp2). Zadnji problem je diferencialni ojačevalnik, ki se uporablja kot vmesnik za nizkofrekvenčne analogne signale (lfbuf).

6 Rezultati

Rezultati optimizacijskih tekov so zbrani v tabeli 3. Navedena sta število izračunov KF in končna vrednost KF za simpleksni in kombinirani postopek.

Prvi trije primeri predstavljajo matematične funkcije. Za linearno funkcijo (lin) kombinirani postopek prekaša simpleksnega iz dveh razlogov. Prvi je, da uporabljamo linearno interpolacijo, ki je za to funkcijo tudi najprimernejša. Drugi razlog pa je, da se minimum nahaja v vogalu iskalnega prostora. Da simpleksni postopek pride v vogal se mora simpleks ustrezno skrajšati, kar pa pomeni, da postopek napreduje počasneje. Konveksna kvadratna funkcija (sq1) ima minimum znotraj iskalnega območja. Ob predlaganem ustavitvenem kriteriju se kombinirani postopek ustavi prezgodaj. Konkavna kvadratna funkcija (sq2) ima minimum v vogalu iskalnega območja in zato kombinirani postopek najde minimum hitreje in bolj natančno.

Od elektrotehniških primerov se najslabše odrežejo vrata NAND. Pri teh se kombinirani postopek ustavi v lokalnem minimumu in končna vrednost KF je nekoliko slabša od tiste dobljene s simpleksnim postopkom. V vseh ostalih primerih kombinirani postopek najde boljšo vrednost KF z manj izračuni kot simpleksni postopek. Še posebej se kombinirani postopek izkaže na največjem optimizacijskem problemu (lfbuf), ki ima 36 optimizacijskih parametrov. Prihranek pri številu izračunov KF se giblje med 7% in 58%.

	Simpleks		Kombinirani	
	N	f	N	f
lin	5066	-999.993	527	-1000
sq1	1991	1.35e-6	972	9.52e-3
sq2	6425	-35999.2	2322	-36000.0
nand	295	166.644	134	167.488
delay	1334	13284.6	1131	12975.1
ddamp	1543	104.426	1432	91.8981
damp1	1716	9.58849	1374	9.58514
damp2	5719	2.64345	4007	2.59150
lfbuf	9152	0.763508	3848	0.707504

Tabela 3: Primerjava rezultatov za simpleksni in kombinirani postopek.

Table 3: The comparison of the number of CF evaluations and the final CF value for the simplex and the combined optimization algorithm.

7 Zaključek

Predstavili smo kombinirani optimizacijski postopek sestavljen in simpleksnega postopka, ki mu sledi postopek področja zaupanja. Razlog za izbiro kombinacije obeh postopkov tiči v poteku KF v najboljši točki simpleksa med optimizacijo. Le ta se že precej pred koncem postopka neha manjšat. Predvidevali smo, da bi lahko zaključni del iskanja pohitrili, če bi uporabili metodo lokalne narave kot je metoda s področjem zaupanja. Ker slednja temelji na interpolaciji KF smo se morali odločiti za vrsto interpolacijske funkcije. Zaradi precejšnjega števila parametrov v elektrotehniških problemih smo se odločili za linearno interpolacijo, ki ne zahteva velikega števila točk in je računsko preprosta. Odločitev kdaj preklopiti na metodo področja zaupanja smo osnovali na velikosti simpleksa. S poskušanjem smo določili optimalen trenutek za preklop.

Kombinirani postopek smo preizkusili na 3 funkcijah in 6 elektrotehniških primerih. V vseh primerih je bil kombinirani postopek hitrejši. Na enem matematičnem in enem elektrotehniškem primeru je našel rahlo slabšo končno vrednost KF. V vseh ostalih primerih pa je bila le ta boljša od vrednosti KF dobljene s simpleksnim postopkom.

8 Zahvala

Raziskave je sofinancirala Agencija za raziskovalno dejavnost v okviru programa P2-0246 - Algoritmi in optimizacijski postopki v telekomunikacijah.

Literatura

- [1] J. Puhan. Optimizacija vezij v programskem okolju Spice : doktorska disertacija. Ljubljana, 2000.
- [2] J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, P.E. Wright. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9: 112–147, 1998.
- [3] A. Conn, N. Gould, P. Toint. Trust-region methods. SIAM, Philadelphia, USA, 2000.
- [4] Á. Búrmen, D. Strle, F. Bratkovič, J. Puhan, I. Fajfar, and T. Tuma. Automated Robust Design and Optimization of Integrated Circuits by Means of Penalty Functions. *International Journal of Electronics and Communications*, 57: 47–56, 2003.
- [5] J. Puhan and T. Tuma. Optimization of analog circuits with SPICE 3f4. *Proceedings of the ECCTD'97*, vol. 1, 177–180, 1997.